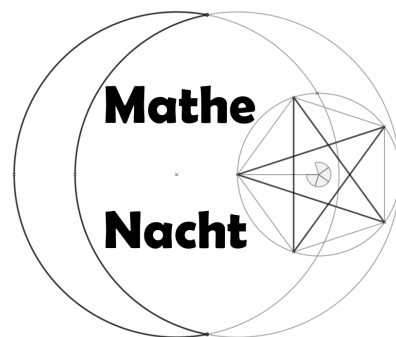
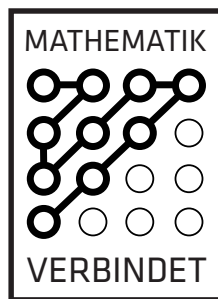


# Grundlagen



## 1. Aufgabe: (Vollständige Induktion)

a) Beweise die folgende Aussage mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) Ist der folgende Beweis richtig?

Beh.:  $\forall n \in \mathbb{N} : n + 1 < n$

Beweis: Angenommen die Aussage gilt für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

z.Z.:  $n + 2 < n + 1$

Aus  $n + 1 < n$  folgt direkt:  $n + 1 + 1 < n + 1 \Rightarrow n + 2 < n + 1$  □

c) Beweise die folgende Aussage mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \sum_{k=2}^n \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n}$$

## 2. Aufgabe: (Darstellung komplexer Zahlen)

Sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z = a + bi$ . Skizziere die folgenden Mengen:

a)  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \sin(a) = b\}$

b)  $B = \{z \in \mathbb{C} \mid 2a - 8 \leq -6b\}$

c)  $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{z+\bar{z}}{2} + 1\}$

## 3. Aufgabe: (Ungleichungen)

Bestimme die Lösungsmengen für  $x \in \mathbb{R}$ .

a)  $|3x - 7| \leq 5$

b)  $\frac{1}{2}x^2 - 6 \geq 3x + 2$

c)  $|x - 7| = |-x + 7|$

**4. Aufgabe:** (*Mengen*)

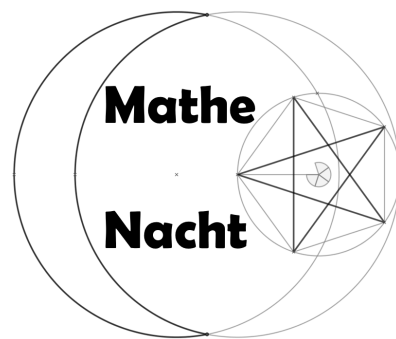
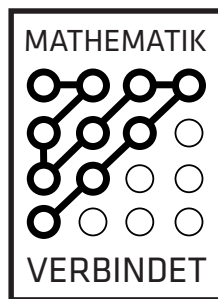
Gib Supremum und Infimum der folgenden Mengen an. Existieren Minimum und Maximum?

a)  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$

b)  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 3 > 6, x < 0\}$

c)  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\sqrt{a+b}}{ab}; a, b \in \mathbb{R}; a, b, \geq 1\}$

# Folgen



## 1. Aufgabe:

Wir betrachten die Folge  $(a_n)$  gegeben durch  $a_n = \frac{6 - n^2}{6n^2}$  und  $(b_n)$  gegeben durch  $b_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$

- Berechne die ersten drei Glieder der Folge  $(a_n)$  und untersuche die Folge auf Monotonie und Beschränktheit.
- Berechne die ersten drei Glieder der Folge  $(b_n)$  (also die ersten drei Partialsummen). Untersuche  $(b_n)$  auf Monotonie und Beschränktheit.
- Untersuche beide Folgen auf Konvergenz und gib gegebenenfalls den Grenzwert an.

## 2. Aufgabe:

Untersuche, ob die Folgen konvergent sind und gib gegebenenfalls den Grenzwert an.

- $a_n = \frac{n+1}{n+4}$
- $b_n = \frac{6n^2 + n}{4n^3 - 6}$
- $c_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$
- $d_n = \frac{2n + \sin(n)}{4n + 2}$
- $e_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$
- $f_n = \sqrt[3]{4n + 4^n}$
- $g_n = \frac{1 + 2^n}{1 + 2^n + (-2)^n}$
- $h_n = \frac{1}{n} \cdot i^n$

## 3. Aufgabe:

Gegeben sei die rekursiv definierte Zahlenfolge  $(a_n)$  durch:

$$a_0 := 0, \quad a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2 + a_n}$$

Untersuche  $(a_n)$  auf Konvergenz.

#### 4. Aufgabe:

Gib alle Häufungspunkte sowie  $\limsup_{n \rightarrow \infty}$  und  $\liminf_{n \rightarrow \infty}$  der Zahlenfolgen an.

a)  $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

b)  $b_n = \frac{(-1)^n(1-n)}{2n+1}$

c)  $c_n = \min\{n, 1000\}$

#### 5. Aufgabe:

- a) Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zwei reelle konvergente Folgen mit den Grenzwerten  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Zeige:

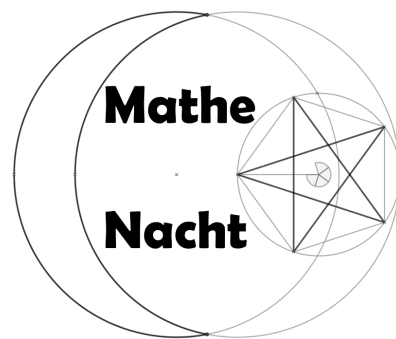
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min\{a_n, b_n\} = \min\{a, b\}$$

- b) Zeige, dass die durch

$$a_1 = 1 \text{ und } a_{n+1} = a_n^2 + a_n$$

definierte Folge keine Cauchy-Folge ist. Zeige dafür zuerst, dass die Folge monoton wachsend ist. Ist die Folge konvergent?

# Reihen



## 1. Aufgabe:

Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{101}}{10^n}$	f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n) \ln(n+1)}$
b) $\sum_{n=2}^{\infty} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}n\right)$	g) $\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}^{-1}, k \in \mathbb{N}_0$
c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$	h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1-i)^n}{e^{\log(2^n)}} \quad (\text{für Bachelor})$
d) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{n} \frac{1}{2^n}$	i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} \quad (\text{für Bachelor})$
e) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$	j*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n-1}}{n^{\log(n)}} \quad (\text{knifflig})$

## 2. Aufgabe:

Folgende Reihen konvergieren. Bestimme ihren Wert.

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{6}{k^2 + 9k + 20}$
b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi^k}$
c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{k})}{\ln(k) \ln(k+1)}$
d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k - \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k \left(\frac{k+2}{k+1}\right)}{2} \quad (\text{für Bachelor})$

## 3. Aufgabe:

Es sei  $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ . Zeige, dass  $\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^{-2} = \frac{3}{4}s$ .

## 4. Aufgabe:

Finde eine konvergente Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  mit positiven Gliedern ( $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ) und folgender Eigenschaft

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty.$$

**5. Aufgabe :**

Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  konvergiert die folgende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n} (\alpha - 2)^n$$

**6. Aufgabe :**

(nur für Lehramt)

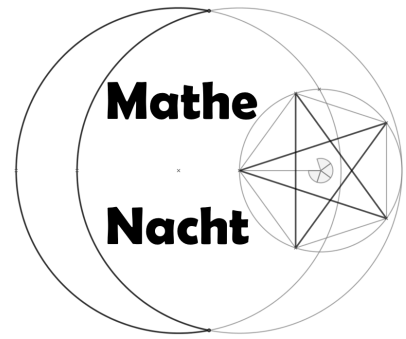
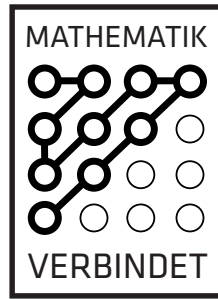
Bestimme die Konvergenzradien folgender Potenzreihen

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} (4n^3 - 3n^4) x^n$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n^n} x^n$

# Funktionen



## 1. Aufgabe:

Kreuze die richtigen Aussagen an und widerlege die falschen Behauptungen.

- Es gibt eine auf  $\mathbb{R}$  stetige Funktion mit Bild  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- Es gibt keine Funktion  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , welche eine Umkehrfunktion besitzt, aber nicht monoton ist.
- Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und gilt  $f(b) = 3f(a)$ , so gibt es ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f(\xi) = 2f(a)$
- Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige und differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$\exists x_0 \in [a, b] : f'(x_0) = 0 \implies f(a) = f(b)$$

- Sei  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Dann gilt:  $\forall x, y \in [-1, 1] : |f(x) - f(y)| \leq 2|x - y| \implies f$  ist stetig. **(Nur für BA)**
- Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Wenn  $|f|$  auf  $[0, 1]$  Riemann-integrierbar ist, dann ist auch  $f$  auf  $[0, 1]$  Riemann-integrierbar. **(Nur für BA)**

## 2. Aufgabe:

Gegeben ist die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{6x^2 - 15x + 4}$ .

- a) Untersuche die Funktion auf Monotonie. Wo ist sie monoton wachsend und wo monoton fallend?
- b) Gibt es konvexe Abschnitte auf der Funktion? Wenn ja, beweise die Konvexität auf dem Abschnitt. **(Nur für LA)**
- c) Bestimme die Maxima und Minima der Funktion, sofern diese existieren.
- d) Bestimme den Definitionsbereich, den Wertebereich und  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

## 3. Aufgabe: (Nur für BA)

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare und streng monoton wachsende Funktion. Sei  $g$  die Umkehrfunktion von  $f$  und sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  mit  $f'(x_0) \neq 0$ . Dann gilt laut Vorlesung für  $y_0 = f(x_0)$ :

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

Beweise die Formel mithilfe der Kettenregel. Hierbei darf die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung vorausgesetzt werden.

#### 4. Aufgabe:

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x|x^\alpha|}{4+x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

mit  $\alpha \in \mathbb{Z}$ .

- a) Untersuche, für welche  $\alpha \in \mathbb{Z}$  die Funktion  $f$  stetig bzw. differenzierbar ist. Gib  $f'(x)$  an, falls existent.
- b) Bestimme alle lokalen und globalen Extremwerte von  $f$  für  $\alpha = 0$ , sofern sie existieren.
- c) Begründe, dass  $f$  mit  $\alpha = 1$  auf dem Intervall  $[-2, 2]$  eine Umkehrfunktion  $f^{-1}$  besitzt. Berechne  $(f^{-1})'(y_0)$  für  $y_0 = f(1)$ .

#### 5. Aufgabe:

Berechne für  $x > 0$  die Ableitung von

$$f(x) := \sin\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\right)$$

#### 6. Aufgabe:

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $x_0 \in (a, b)$  mit  $x_0 \neq 0$  und  $g(x) := xf(x)$  differenzierbar in  $x_0$ .

Beweise, dass dann auch  $f(x)$  differenzierbar in  $x_0$  sein muss und gib ein Gegenbeispiel dafür an, dass die Aussage nicht richtig ist für  $x_0 = 0$ .