Grundlagen

1. Aufgabe: (*Vollständige Induktion*)

a) Beweise die folgende Aussage mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) Ist der folgende Beweis richtig?

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N} : n + 1 < n$

Beweis: Angenommen die Aussage gilt für ein $n \in \mathbb{N}$.
z.Z.: $n + 2 < n + 1$
Aus $n + 1 < n$ folgt direkt: $n + 1 + 1 < n + 1 \Rightarrow n + 2 < n + 1$ $\square$

c) Beweise die folgende Aussage mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2: \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n}$$

2. Aufgabe: (*Darstellung komplexer Zahlen*)

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z = a + bi$. Skizziere die folgenden Mengen:

a) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \sin(a) = b\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid 2a - 8 \leq -6b\}$

c) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{z+\overline{z}}{2} + 1\}$

3. Aufgabe: (*Ungleichungen*)

Bestimme die Lösungsmengen für $x \in \mathbb{R}$.

a) $|3x - 7| \leq 5$

b) $\frac{1}{2}x^2 - 6 \geq 3x + 2$

c) $|x - 7| = |-x + 7|$

4. Aufgabe: (*Mengen*)

Gib Supremum und Infimum der folgenden Mengen an. Existieren Minimum und Maximum?

a) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 3 > 6, x < 0\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\sqrt{a+b}}{ab}; a, b \in \mathbb{R}; a, b, \geq 1\}$

Folgen

1. Aufgabe:

Wir betrachten die Folge (a_n) gegeben durch $a_n = \dfrac{6-n^2}{6n^2}$ und (b_n) gegeben durch $b_n = a_1 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

a) Berechne die ersten drei Glieder der Folge (a_n) und untersuche die Folge auf Monotonie und Beschränktheit.

b) Berechne die ersten drei Glieder der Folge (b_n) (also die ersten drei Partialsummen). Untersuche (b_n) auf Monotonie und Beschränktheit.

c) Untersuche beide Folgen auf Konvergenz und gib gegebenenfalls den Grenzwert an.

2. Aufgabe:

Untersuche, ob die Folgen konvergent sind und gib gegebenenfalls den Grenzwert an.

a) $a_n = \dfrac{n+1}{n+4}$

b) $b_n = \dfrac{6n^2+n}{4n^3-6}$

c) $c_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

d) $d_n = \dfrac{2n+\sin(n)}{4n+2}$

e) $e_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$

f) $f_n = \sqrt[n]{4n+4^n}$

g) $g_n = \dfrac{1+2^n}{1+2^n+(-2)^n}$

h) $h_n = \frac{1}{n} \cdot i^n$

3. Aufgabe:

Gegeben sei die rekursiv definierte Zahlenfolge (a_n) durch:

$$a_0 := 0, \quad a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2+a_n}$$

Untersuche (a_n) auf Konvergenz.

4. Aufgabe:

Gib alle Häufungspunkte sowie $\limsup_{n\to\infty}$ und $\liminf_{n\to\infty}$ der Zahlenfolgen an.

a) $a_n = \sin(\frac{n\pi}{6})$

b) $b_n = \frac{(-1)^n(1-n)}{2n+1}$

c) $c_n = \min\{n, 1000\}$

5. Aufgabe:

a) Seien (a_n) und (b_n) zwei reelle konvergente Folgen mit den Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Zeige:

$$\lim_{n\to\infty} \min\{a_n, b_n\} = \min\{a, b\}$$

b) Zeige, dass die durch

$$a_1 = 1 \text{ und } a_{n+1} = a_n^2 + a_n$$

definierte Folge keine Cauchy-Folge ist. Zeige dafür zuerst, dass die Folge monoton wachsend ist. Ist die Folge konvergent?

Reihen

1. Aufgabe:

Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{101}}{10^n}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \sin^n(\frac{\pi}{2}n)$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{n} \frac{1}{2^n}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$

f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)\ln(n+1)}$

g) $\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}^{-1}$, $k \in \mathbb{N}_0$

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1-i)^n}{e^{\log(2^n)}}$ (für Bachelor)

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[n]{n}}{n}$ (für Bachelor)

j*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{n^{\log(n)}}$ (knifflig)

2. Aufgabe:

Folgende Reihen konvergieren. Bestimme ihren Wert.

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{6}{k^2 + 9k + 20}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi^k}$

c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\ln(k)\ln(k+1)}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k - \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k \left(\frac{k+2}{k+1}\right)}{2}$ (für Bachelor)

3. Aufgabe:

Es sei $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Zeige, dass $\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^{-2} = \frac{3}{4}s$.

4. Aufgabe:

Finde eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit positiven Gliedern ($a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$) und folgender Eigenschaft $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$.

5. Aufgabe:

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n} (\alpha - 2)^n$$

6. Aufgabe:

(nur für Lehramt)

Bestimme die Konvergenzradien folgender Potenzreihen

$$\textbf{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$$

$$\textbf{b)} \sum_{n=0}^{\infty} (4n^3 - 3n^4) x^n$$

$$\textbf{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n^n} x^n$$

Funktionen

1. Aufgabe:

Kreuze die richtigen Aussagen an und widerlege die falschen Behauptungen.

- ☐ Es gibt eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion mit Bild $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- ☐ Es gibt keine Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, welche eine Umkehrfunktion besitzt, aber nicht monoton ist.
- ☐ Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und gilt $f(b) = 3f(a)$, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = 2f(a)$
- ☐ Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$\exists x_0 \in [a,b] : f'(x_0) = 0 \implies f(a) = f(b)$$

- ☐ Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt: $\forall x,y \in [-1,1] : |f(x) - f(y)| \leq 2|x-y| \implies f$ ist stetig. **(Nur für BA)**
- ☐ Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wenn $|f|$ auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist, dann ist auch f auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar. **(Nur für BA)**

2. Aufgabe:

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{6x^2-15x+4}$.

a) Untersuche die Funktion auf Monotonie. Wo ist sie monoton wachsen und wo monoton fallend?

b) Gibt es konvexe Abschnitte auf der Funktion? Wenn ja, beweise die Konvexität auf dem Abschnitt. **(Nur für LA)**

c) Bestimme die Maxima und Minima der Funktion, sofern diese existieren.

d) Bestimme den Definitionsbereich, den Wertebereich und $\lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)$

3. Aufgabe: (***Nur für BA***)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare und streng monoton wachsende Funktion. Sei g die Umkehrfunktion von f und sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann gilt laut Vorlesung für $y_0 = f(x_0)$:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

Beweise die Formel mithilfe der Kettenregel. Hierbei darf die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung vorausgesetzt werden.

4. Aufgabe:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x|x^\alpha|}{4+x^2} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

mit $\alpha \in \mathbb{Z}$.

a) Untersuche, für welche $\alpha \in \mathbb{Z}$ die Funktion f stetig bzw. differenzierbar ist. Gib $f'(x)$ an, falls existent.

b) Bestimme alle lokalen und globalen Extremwerte von f für $\alpha = 0$, sofern sie existieren.

c) Begründe, dass f mit $\alpha = 1$ auf dem Intervall $[-2, 2]$ eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt. Berechne $(f^{-1})'(y_0)$ für $y_0 = f(1)$.

5. Aufgabe:

Berechne für $x > 0$ die Ableitung von

$$f(x) := \sin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$$

6. Aufgabe:

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in (a, b)$ mit $x_0 \neq 0$ und $g(x) := xf(x)$ differenzierbar in x_0.
Beweise, dass dann auch $f(x)$ differenzierbar in x_0 sein muss und gib ein Gegenbeispiel dafür an, dass die Aussage nicht richtig ist für $x_0 = 0$.